بذلك نصل إلى مجموعة المعادلات الآتية :

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ -3x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -8x_3 &= 8 \end{array}\right\}$$

التي لها حل وحيد هو

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -1 .$$

وهكذا يتضح أن المجموعة الأصلية محددة .

٢ ــ حل المجموعة :

$$\begin{array}{rl} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 &= -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 &= 2 \end{array}$$

نجرى التحويلات على المصفوفة الموسعة لهذه المجموعة :

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

لقد توصلنا إلى مجموعة تحتوى على المعادلة $2 = 0$. وعلى هذا تكون المجموعة الأصلية متناقضة .

٣ ــ حل المجموعة :

$$\left.\begin{array}{rl} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{array}\right\}$$

هذه مجموعة معادلات متجانسة علما بأن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل ، ولهذا يجب أن تكون هذه المجموعة غير محددة . وبما أن جميع الحدود المطلقة تساوى الصفر فإننا سوف نجرى التحويلات على المصفوفة المكونة من معاملات المجموعة فقط .

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

لقد توصلنا إلى مجموعة المعادلات

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{array}\right\}$$

ويمكن أخذ أى من المجهولين x_2 و x_4 كمجهول مطلق .

نفرض أن $\alpha = x_4$ حينئذ نجد من المعادلة الأولى أن $\alpha = x_2$ ، وبعد هذا نجد من المعادلة الثانية أن $x_3 = \frac{4}{5}\alpha$ ، وأخيراً من المعادلة الثالثة نجد أن $x_1 = \frac{3}{5}\alpha$. وهكذا فإن α ، $\frac{4}{5}\alpha$ ، α ، $\frac{3}{5}\alpha$ ستكون الصورة العامة لحلول مجموعة المعادلات المعطاة .

٢ ــ المحددات من الرتبتين الثانية والثالثة

إن طريقة حل مجموعة المعادلات الخطية المعروضة فى البند السابق ، تتميز بالبساطة المتناهية ، وتتطلب القيام بحسابات ذات نوع واحد ، يمكن إجراؤها بسهولة على الآلات الحاسبة . غير أن لهذه الطريقة عيباً جوهرياً ، هو أنها لا تعطى إمكانية صياغة شروط عدم تناقض أو تحديد مجموعة المعادلات بمساعدة المعاملات والحدود المطلقة لهذه المجموعة . ومن ناحية أخرى ، وحتى فى حالة مجموعة المعادلات المحددة ، فإن هذه الطريقة لا تسمح بإيجاد العلاقات التى تعطى حل هذه المجموعة ، بدلالة المعاملات والحدود المطلقة . وقد اتضحت ضرورة هذا كله ، للمسائل النظرية المختلفة ، وخاصة للأبحاث الهندسية . ولهذا ، فنحن مضطرون إلى تطوير نظرية مجموعات المعادلات الخطية بطرق أخرى أكثر عمقاً . وسنتناول بحث الحالة العامة فى الباب التالى ، ونكرس بقية محتويات الباب الحالى لدراسة المجموعات المحددة التى لها عدد متساوٍ من المعادلات والمجاهيل . علماً بأننا سنبدأ من المجموعات فى مجهولين أو ثلاثة ، والتى سبق دراستها فى مقرر الجبر الأولى .

لنفرض أن لدينا مجموعة مكونة من معادلتين خطيتين فى مجهولين ومعاملات

هذه المجموعة تكون مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

بتطبيق طريقة مساواة المعاملات على المجموعة (1) نحصل على الآتى :

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 ,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} ,$$

نفرض أن $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. عندئذ تكون

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} , \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (3)$$

ويمكن التحقق بسهولة من أن (3) تمثل حلا للمجموعة (1) ، بالتعويض بقيم المجاهيل التى حصلنا عليها فى المعادلة (1) . أما مشكلة وحدانية هذا الحل ، فسوف نتناول دراستها فى البند (7) .

ويمكن التعبير ببساطة عن المقام المشترك لقيم المجاهيل (3) بدلالة عناصر المصفوفة (2) : فهذا المقام يساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى مطروحاً منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر وهذا العدد يسمى بمحدد المصفوفة (2)، علماً وكما يقال بمحدد من الرتبة الثانية ، لأن المصفوفة (2) ، هى من الرتبة الثانية. وللدلالة على محدد المصفوفة (2) نستعمل الرمز التالى : نكتب المصفوفة (2) ولكن نرسم بدلا من القوسين الدائريين خطين مستقيمين ، وبهذه الطريقة فإن

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (4)$$

أمثلة .

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\times4 - 7\times1 = 5$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times5 - (-2)\times3 = 11$$

ويجدر بنا أن نشير مرة أخرى إلى أنه فى نفس الوقت الذى تكون فيه المصفوفة جدولا من الأعداد ، يكون المحدد عدداً مرتبطاً بطريقة محددة تماماً بالمصفوفة المربعة . نلاحظ أن حواصل الضرب $a_{11}a_{22}$ ، $a_{12}a_{21}$ تسمى بحدود المحدد من الرتبة الثانية .

وتكون للبسط فى كل من المقدارين (3) نفس صورة المقام ، أى أنه يكون محدداً من الرتبة الثانية أيضاً . فبسط المقدار بالنسبة إلى x_1 يساوى محدد المصفوفة التى نحصل عليها من المصفوفة (2) باستبدال عمودها الأول بعمود الحدود المطلقة للمجموعة (1) ، ويكون بسط المقدار الذى يعين المجهول x_2 مساوياً لمحدد المصفوفة التى نحصل عليها من المصفوفة (2) باستبدال عمودها الثانى بنفس عمود الحدود المطلقة للمجموعة (1) .

والآن ، يمكن كتابة العلاقات (3) على الصورة الآتية :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} , \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (5)$$

ويمكن صياغة هذه القاعدة لحل مجموعة المعادلتين الخطيتين فى مجهولين (تسمى بقاعدة كرامر) بالطريقة الآتية :

إذا كان المحدد (4) المكون من معاملات مجموعة المعادلات (1) لا يساوى صفراً ، فإننا نحصل على حل مجموعة المعادلات (1) آخذين كقيم للمجاهيل كسوراً يكون المحدد (4) هو مقامها المشترك ويكون بسط المجهول $x_i\ (i = 1,2)$ محدداً نحصل عليه باستبدال العمود رقم i فى المحدد (4) (أى عمود معاملات المجهول المطلوب تحديده) بعمود من الحدود المطلقة للمجموعة (1) *.

* فى هذه الصياغة ، وللاختصار ، تكلمنا عن استبدال الأعمدة فى المحدد . وبنفس الطريقة ، وعندما يكون ذلك أنسب فى المستقبل ، سنتكلم عن الصفوف والأعمدة فى المحدد ، وكذلك عن العناصر والأقطار وما شابه ذلك .

مثال . حل المجموعة :

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{array}\right\}$$

محدد المعاملات هو :

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7$$

وهو لا يساوى الصفر ؛ ولهذا يمكن تطبيق قاعدة كرامر على هذه المجموعة . وسيكون بسطا المجهولين هما المحددين

$$d_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

وهكذا فإن مجموعة الأعداد الآتية تمثل حلا لمجموعتنا :

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{19}{7} \quad , \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{11}{7}$$

إن إدخال محددات الرتبة الثانية لاتقدم أية تسهيلات محسوسة على حل مجموعة المعادلتين الخطيتين فى مجهولين ، والذى لا يمثل بطبيعته أية صعوبة . أما الفائدة العملية للطرق المماثلة فتتضح فى حالة المجموعة المكونة من ثلاث معادلات خطية فى ثلاثة مجاهيل .

لتكن لدينا المجموعة

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

ذات مصفوفة المعاملات

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

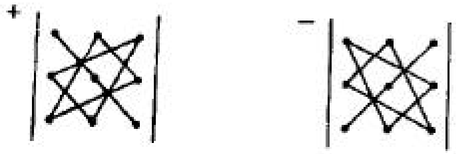
إذا ضربنا طرفى أولى المعادلات (6) فى العدد $a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}$. وطرفى المعادلة الثانية فى $a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}$ ، وطرفى الثالثة فى $a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}$ ، وبعد ذلك جمعنا هذه المعادلات الثلاث ، فإنه يمكن التحقق بسهولة من أن المعاملات x_2 و x_3 تصبح مساوية للصفر ، أى أنه يتم حذف هذين المجهولين فى آن واحد ، وبذلك نحصل على المعادلة الآتية :

$$\begin{aligned} (a_{11} a_{22} a_{33} &+ a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - \\ &- a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32})\, x_1 = b_1 a_{22} a_{33} + \\ &+ a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - a_{13} a_{22} b_3 - \\ &- a_{12} b_2 a_{33} - b_1 a_{23} a_{32} . \end{aligned} \qquad (8)$$

ومعامل x_1 فى هذه المتساوية يسمى بمحدد من الرتبة الثالثة ، المناظر للمصفوفة (7) . وللدلالة عليه ، نستعمل نفس الرمز الذى سبق استعماله فى حالة محددات من الرتبة الثانية ، وهكذا ، فإن

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - \\ &- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - \\ &- a_{11} a_{23}\, 32 \end{aligned} \qquad (9)$$

ومع كون مقدار المحدد من الرتبة الثالثة معقداً بما فيه الكفاية ، إلا أن قانون إيجاده بدلالة عناصر المصفوفة (7) يبدو بسيطاً جداً . وبالفعل ، نجد أن أحد الحدود الثلاثة التى لها إشارة " زائد " ، والداخلة فى المقدار (9) ، عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى . وأن كل حد من الحدين الآخرين ، عبارة عن حاصل ضرب العنصرين الواقعين على الخط الموازى للقطر الرئيسى . مع إضافة العنصر الثالث الواقع فى ركن المصفوفة المقابلة ، أما الحدود الداخلة فى (9) بإشارة " ناقص " فتتكون بنفس الطريقة ، ولكن بالنسبة للقطر الثانى . وبذلك نحصل على طريقة لحساب المحددات من الرتبة الثالثة ، تؤدى إلى النتيجة بسرعة جداً (مع بعض التمرين) . ويبين الرسم الأيسر من الشكل ١ بصورة تخطيطية ، قاعدة حساب الحدود الموجبة لمحدد الرتبة الثالثة ، والرسم الأيمن قاعدة حساب الحدود السالبة لهذا المحدد .



شكل ١

أمثلة :

$$1)\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times3\times2- -1\times(-4)\times5-2\times1\times3 = 30+2-24-12+ +20-6=10$$

$$2)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\times3\times0+0\times2\times1+(-5)\times(-2)\times(-2)- -(-5)\times3\times1-0\times(-2)\times0-1\times2\times(-2) = =-20+15+4=-1.$$

وسيكون الطرف الأيمن للمعادلة (8) محدداً أيضاً من الرتبة الثالثة ، وبالذات محدد المصفوفة التى نحصل عليها من المصفوفة (7) باستبدال عمودها الأول بالعمود المكون من الحدود المطلقة للمجموعة (6) . فإذا رمزنا للمحدد (9) بالحرف d وللمحدد الذى نحصل عليه باستبدال عموده رقم j ($j = 1, 2, 3$) بالعمود المكون من الحدود المطلقة للمجموعة (6) بالرمز d_j ، فإن المعادلة (8) تأخذ الصورة $dx_1 = d_1$ ، ونستنتج من هنا ، عندما تكون $d \neq 0$ ، أن

$$x_1 = \frac{d_1}{d} \tag{10}$$

بنفس الطريقة وبضرب المعادلات (6) على الترتيب فى الأعداد

$$a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\ ,\ a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\ ,\ a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$$

نحصل على المقدار الثانى للمجهول x_2 (ومن جديد عندما تكون $d \neq 0$) :

$$x_2 = \frac{d_2}{d} \tag{11}$$

وأخيراً بضرب هذه المعادلات على الترتيب فى

$$a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\ ,\ a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}\ ,\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ ,$$

فإننا نصل إلى المقدار التالى للمجهول x_3 :

$$x_3 = \frac{d_3}{d} \tag{12}$$

بالتعويض بمقادير المجاهيل (10) — (12) فى المعادلات (6) (من المفروض كما هو مفهوم أن المحدد d وكل المحددات d_j مكتوبة بالتفصيل) ، فإننا نحصل ، بعد حسابات معقدة ولكن فى مقدرة القارئ تماماً القيام بها، إن كل هذه المعادلات تتحقق ، أى أن الأعداد (10) — (12) تكون حلا للمجموعة (6) . وهكذا إذا كان المحدد المكون من معاملات مجموعة ثلاث معادلات خطية فى ثلاثة مجاهيل لا يساوى الصفر ، فإنه يمكن إيجاد حل هذه المجموعة بقاعدة كرامر التى تصاغ بنفس الطريقة التى صيغت بها فى حالة مجموعة المعادلتين . ويجد القارئ فى البند (٧) برهاناً آخر على هذه النظرية (لا يعتمد على الحسابات التى أهملناها) ، وكذلك برهان وحدانية الحل (10) — (12) للمجموعة (6) ، فضلا عن أنه حالة أعم .

مثال . حل المجموعة :

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

محدد معاملات هذه المجموعة لا يساوى الصفر :

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28$$

ولهذا ، يمكن تطبيق قاعدة كرامر على المجموعة . وسيكون بسط كل من المجاهيل محدداً من المحددات التالية :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

أى أن مجموعة الأعداد

$$x_1 = \frac{13}{28} \quad , \quad x_2 = \frac{47}{28} \quad , \quad x_3 = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

تمثل حلا للمجموعة .

٣ ــ التباديل والتعويضات

(Permutations and Substitutions)

عند تعريفنا ودراستنا لمحددات n ، سوف نحتاج إلى بعض المفاهيم والحقائق المتعلقة بالمجموعات المنتهية (finite sets). لنفرض أن لدينا مجموعة منتهية M مكونة من n عنصر . يمكن ترقيم هذه العناصر بمساعدة أول n عدد طبيعى $1, 2, \dots n$. وبما أن الخواص الذاتية لعناصر المجموعة M لن تلعب أى دور فى المسائل التى تهمنا ، فإننا سوف نعتبر ببساطة أن الأعداد $1, 2, \dots , n$ نفسها تمثل ، عنصر المجموعة M .

وإلى جانب الترتيب المستعمل للأعداد $1, 2, \dots, n$ فى نظامها المألوف ، فإنه يمكن ترتيبها بطرق أخرى كثيرة . فالأعداد $1, 2, 3, 4$ مثلا يمكن ترتيبها بالطرق الآتية أيضاً : $3, 1, 2, 4$ أو $2, 3, 2, 4,$ وهكذا . أى ترتيب للأعداد $1, 2, \dots , n$ فى نظام معين ما بتبديل (permutation) من n عدد (أو من n رمز) .

إن عدد التباديل المختلفة التى يمكن تكوينها من n رمز ، يساوى حاصل الضرب $1, 2, \dots n$ الذى يشار إليه بالرمز $n!$ (ويقرأ "مضروب n" "n-factorial" وبالفعل . تكون الصورة العامة للتبديل من n رمز ، هى $i_1 , i_2, \dots , i_n$ ، حيث كل من الرموز i_α عبارة عن أحد الأعداد $1, 2, \dots , n$ علماً بأن أيًا من هذه الأعداد

لا يتكرر مرتين . ويمكن أخذ أى من الأعداد $1, 2, \dots , n$ بمثابه الرمز i_1 . وهذا يعطى n احتمالا مختلفاً . غير أنه إذا كان الرمز i_1 قد اختير ، فإنه يمكن أخذ أى عدد من الأعداد الباقية التى عددها $n - 1$ بمثابة i_2 . أى أن عدد الطرق المختلفة لاختيار الرمزين i_1 و i_2 يساوى حاصل الضرب $n(n-1)$ وهكذا .

وبهذه الطريقة ، فإن عدد التباديل من n رمز عندما يكون $n = 2$ يساوى $2! = 2$ (التبديلان هما 12 و 21 ؛ وفى الأمثلة، نحن لن نضع فواصل بين الرموز المرتبة عندما يكون $n \leq 9$) وعند ما يكون $n = 3$ فإن هذا العدد يساوى $3! = 6$ وعندما يكون $n = 4$ فإنه يساوى $4! = 24$. وبزيادة n بعد ذلك يتزايد عدد التباديل بسرعة هائلة ، فمثلا عند ما يكون $n = 5$ فإنه يساوى $5! = 120$ ، وعند ما يكون $n = 10$ ، فإنه يساوى 3628800 .

إذا غيرنا فى أحد التباديل مكانى رمزين ما (ليس من الضرورى أن يكونا متجاورين) ، وأبقينا جميع الرموز الباقية فى مكانها ، فمن الواضح أننا نحصل على تبديل جديد . ويسمى هذا التحويل الذى أجريناه على التبديل بالإبدال transposition .

كل التباديل الممكن تكوينها من n رمز ، والتى عددها $n!$ ، يمكن ترتيبها بنظام معين ، بحيث إن كل تبديل لاحق يمكن الحصول عليه من التبديل السابق له مباشرة بإبدال واحد ، علما بأنه يمكن البدء بأى تبديل .

هذه النظرية صحيحة عند ما يكون $n = 2$: فإذا كان من المطلوب البدء بالتبديل 12 ، فيكون الترتيب المطلوب هو 12,21 ، أما إذا كان علينا أن نبدأ بالتبديل 21 ، فيكون الترتيب هو 21, 12 . نفرض أن نظريتنا صحيحة بالنسبة لـ $n - 1$ ، ونبرهن على صحتها بالنسبة لـ n . نفرض أن علينا البدء بالتبديل

$$i_1, i_2, \dots , i_n \qquad (1)$$

لنتناول دراسة كل التباديل من n رمز التى يحتل الرمز i_1 المكان الأول فيها . أن عدد هذه التباديل $(n-1)!$ ، ويمكن ترتيب هذه التباديل طبقاً لمتطلبات النظرية ،

بذلك نصل إلى مجموعة المعادلات الآتية :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ -3x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -8x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

التي لها حل وحيد هو

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3, \; x_3 = -1 .$$

وهكذا يتضح أن المجموعة الأصلية محددة .

٢ — حل المجموعة :

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 &= -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 &= 2 \end{aligned}$$

نجرى التحويلات على المصفوفة الموسعة لهذه المجموعة :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

لقد توصلنا إلى مجموعة تحتوى على المعادلة $2 = 0$. وعلى هذا تكون المجموعة الأصلية متناقضة .

٣ — حل المجموعة :

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

هذه مجموعة معادلات متجانسة علما بأن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل ، ولهذا يجب أن تكون هذه المجموعة غير محددة . وبما أن جميع الحدود المطلقة تساوى الصفر فإننا سوف نجرى التحويلات على المصفوفة المكونة من معاملات المجموعة فقط .

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

لقد توصلنا إلى مجموعة المعادلات

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 \qquad\qquad - 2x_4 &= 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ويمكن أخذ أى من المجهولين x_2 و x_4 كمجهول مطلق .

نفرض أن $x_4 = \alpha$ حينئذ نجد من المعادلة الأولى أن $x_2 = \alpha$ ، وبعد هذا نجد من المعادلة الثانية أن $x_3 = \frac{4}{5}\alpha$ ، وأخيراً من المعادلة الثالثة نجد أن $x_1 = \frac{3}{5}\alpha$. وهكذا فإن α ، $\frac{4}{5}\alpha$ ، α ، $\frac{3}{5}\alpha$ ستكون الصورة العامة لحلول مجموعة المعادلات المعطاة .

٢ — المحددات من الرتبتين الثانية والثالثة

إن طريقة حل مجموعة المعادلات الخطية المعروضة فى البند السابق ، تتميز بالبساطة المتناهية ، وتتطلب القيام بحسابات ذات نوع واحد ، يمكن إجراؤها بسهولة على الآلات الحاسبة . غير أن لهذه الطريقة عيباً جوهرياً ، هو أنها لا تعطى إمكانية صياغة شروط عدم تناقض أو تحديد مجموعة المعادلات بمساعدة المعاملات والحدود المطلقة لهذه المجموعة . ومن ناحية أخرى ، وحتى فى حالة مجموعة المعادلات المحددة ، فإن هذه الطريقة لا تسمح بإيجاد العلاقات التى تعطى حل هذه المجموعة ، بدلالة المعاملات والحدود المطلقة . وقد اتضحت ضرورة هذا كله ، للمسائل النظرية المختلفة ، وخاصة للأبحاث الهندسية . ولهذا ، فنحن مضطرون إلى تطوير نظرية مجموعات المعادلات الخطية بطرق أخرى أكثر عمقاً . وسنتناول بحث الحالة العامة فى الباب التالى ، ونكرس بقية محتويات الباب الحالى لدراسة المجموعات المحددة التى لها عدد متساوٍ من المعادلات والمجاهيل . علماً بأننا سنبدأ من المجموعات فى مجهولين أو ثلاثة ، والتى سبق دراستها فى مقرر الجبر الأولى .

لنفرض أن لدينا مجموعة مكونة من معادلتين خطيتين فى مجهولين ومعاملات

في هذا المثال * يقع العدد 5 تحت العدد 3 ، ويقع العدد 2 تحت العدد 5 ، وهكذا . ويقال إن العدد 3 تحول إلى العدد 5 والعدد 5 تحول إلى العدد 2 ، والعدد 1 تحول إلى 3 ، والعدد 4 تحول إلى 4 (أو يظل في مكانه) ، وأخيراً العدد 2 تحول إلى 1 . وهكذا يحدد التبديلان المكتوبان أحدهما تحت الآخر على الصورة (4) ، تناظراً أحاديا (one-to-one correspondence) بين مجموعة أول خمسة أعداد طبيعية مع نفسها ، أي تناظراً يضع في مقابل كل عدد من الأعداد الطبيعية 1, 2, 3, 4, 5 عدداً واحداً من نفس هذه الأعداد، علماً بأنه يضع في مقابل الأعداد المختلفة أعداداً مختلفة، وعند ذلك ، وبما أن الأعداد خمسة فقط ، أي أنها عبارة عن مجموعة منتهية ، فإن كل عدد من هذه الأعداد الخمسة سيناظر أحد الأعداد 1, 2, 3, 4, 5 ، وبالذات العدد الذي " يتحول " إليه .

ومن الواضح أن ذلك التناظر الأحادي لمجموعة أول خمسة أعداد طبيعية مع نفسها الذي حصلنا عليه بمساعدة (4) ، كان من الممكن الحصول عليه بكتابة بعض الأزواج الأخرى من التباديل ذات الخمسة رموز أحدهما تحت الآخر . ونحصل على هذه الكتابات من (4) بواسطة إجراء عدة إبدالات على الأعمدة ، مثلا

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{5}$$

وفي كل هذه الكتابات تتحول 3 إلى 5 ، و 5 إلى 2 وهكذا ...

وبنفس الطريقة يحدد التبديلان من n رمز المكتوبان أحدهما تحت الآخر تناظراً أحاديا بين مجموعة أول n من الأعداد الطبيعية مع نفسها . أي تناظر أحادي A بين مجموعة أول n من الأعداد الطبيعية مع نفسها ، يسمى بتعويض من الدرجة النونية (substitution of n^{th} degree) ، علماً بأنه من الواضح يمكن كتابة أي تعويض A بمساعدة تبديلين مكتوبين أحدهما تحت الآخر :

$$A = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots & i_n, \\ a_{i_1}, & a_{i_2}, & \dots, & a_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

* الشكل الخارجي يذكرنا بمصفوفة من صفين وخمسة أعمدة ، ولكن التعويض له معنى آخر تماماً .

وهنا يشار إلى العدد الذي يتحول إليه العدد i في هذا التعويض A بالرمز a_i حيث $i = 1, 2, \dots, n$.

وتوجد للتعويض A كتابات مختلفة كثيرة على الصورة (6) ، مثلا (4) و (5) يمثلان كتابات مختلفة لتعويض واحد من الدرجة الخامسة .

ويمكن الانتقال من إحدى كتابات التعويض A إلى أية كتابة أخرى بواسطة إجراء عدة إبدالات على الأعمدة . وعند ذلك ، يمكن الحصول على كتابة على الصورة (6) ، بحيث يقع في صفها الأعلى (أو الأسفل) أي تبديل معطى مسبقا من n رمز وكحالة خاصة يمكن كتابة أي تعويض A من الدرجة n على الصورة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

أي بالترتيب الطبيعي للأعداد في الصف الأعلى . وعند الكتابة بهذه الطريقة ، فإن التعويضات المختلفة تتميز بعضها عن البعض بالتباديل الواقعة في صفها الأسفل ، ولهذا ، فإن عدد التعويضات من الدرجة النونية يساوي عدد التباديل من n رمز ، أي يساوي $n!$.

وكمثال على التعويضات من الدرجة النونية نعطي التعويض المتطابق (identical substitution)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

الذي تظل فيه كل الرموز في مكانها .

وتجدر بنا ملاحظة أن الصفين الأعلى والأسفل في الكتابة (6) للتعويض A يلعبان دورين مختلفين ، وبإبدالهما نحصل ، على وجه العموم ، على تعويض آخر . فعلى سبيل المثال يكون التعويضان الآتيان من الدرجة الرابعة مختلفين :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

فنى التعويض الأول يتحول العدد 2 إلى 4 ، وفى الثانى يتحول نفس العدد 2 إلى 3 .

نأخذ أية كتابة على الصورة (6) للتعويض A من الدرجة النونية . يمكن أن يكون للتبديلين الواقعين فى الصفين الأعلى والأسفل من الكتابة إما زوجيتان متساويتان أو زوجيتان متضادتان . وكما نعرف يمكن الانتقال إلى أية كتابة أخرى للتعويض A بواسطة إجراء عدة إبدالات على التوالى فى الصف الأعلى ، وإجراء مثيلاتها فى الصف الأسفل . غير أنه بإجراء إبدال واحد فى الصف الأعلى للكتابة (6) ، وبإجراء إبدال واحد على العناصر المناظرة فى الصف الأسفل ، فإننا نغير فى نفس الوقت زوجية كلا التبديلين ، ولهذا فإننا نحفظ تساوى أو تضاد زوجيتى هذين التبديلين . وينتج من هنا أنه أما تتساوى زوجيتا الصفين الأعلى والأسفل فى جميع كتابات التعويض A وإما أن تتضادا فى جميع هذه الكتابات . فى الحالة الأولى يسمى التعويض A **بتعويض زوجى** ، وفى الحالة الثانية **بتعويض فردى** . وكحالة خاصة يكون التعويض المنطبق زوجيا .

إذا كان التعويض A مكتوبا على الصورة (7) ، أى أن التبديل الزوجى $1, 2, \ldots, n$ يقع فى الصف الأعلى ، فإن زوجية التعويض A تتحدد بزوجية التبديل $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ الواقع فى الصف الأسفل . وينتج من هنا أن عدد التعويضات الزوجية من الدرجة n يساوى عدد التعويضات الفردية من نفس الدرجة أى يساوى $\frac{1}{2} n!$.

ويمكن تعريف زوجية التعويض على الصورة الآتية ، التى تختلف بعض الشىء عن الصورة السابقة . إذا كانت زوجيتا الصفين فى الكتابة (6) متطابقتين ، فإن عدد التعاكسات إما أن يكون زوجيا فى كلا الصفين أو فرديا فى كليهما ، أى أن العدد الكلى للتعاكسات فى صفى الكتابة (6) سيكون زوجيا . أما إذا كانت زوجيتا صفى الكتابة (6) متضادتين ، فإن العدد الكلى للتعاكسات فى هذين الصفين سيكون فردياً . وهكذا ، يكون التعويض A زوجياً ، إذا كان العدد الكلى للتعاكسات فى صفى أية كتابة من كتاباته زوجياً ، ويكون هذا

التعويض فردياً فى الحالة العكسية .

مثال . نفرض أن لدينا التعويض الآتى من الدرجة الخامسة :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

توجد فى صفه الأعلى أربعة تعاكسات وفى صفه الأسفل سبعة تعاكسات . يساوى العدد الكلى للتعاكسات فى الصفين أحد عشر ، ولهذا فالتعويض فردى .

نعيد كتابة هذا التعويض على الصورة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

يساوى عدد التعاكسات فى الصف الأعلى صفرا ، وفى الصف الأسفل خمسة ، أى أن العدد الكلى للتعاكسات يكون فرديا من جديد . وهكذا نرى أن زوجية العدد الكلى للتعاكسات تتغير عند كتابة التعويض بطرق مختلفة ، بينما يتغير العدد ذاته .

ونريد الآن الإشارة إلى بعض الصور الأخرى لتعريف زوجية التعويضات المكافئة للصور الواردة أعلاه* . لهذا الغرض نعرف ضرب التعويضات ، الذى يثير اهتماماً كبيراً بحد ذاته .

وكما نعرف فإن التعويض من الدرجة النونية ، ما هو إلا تناظر أحادى لمجموعة الأعداد $1, 2, \ldots, n$ مع نفسها . ومن الواضح أن التطبيق المتتالى لتناظرين أحاديين للمجموعة $1, 2, \ldots, n$ مع نفسها ، يكون من جديد تناظراً أحاديا ما ، لهذه المجموعة مع نفسها ، أى أن التطبيق المتتالى لتعويضين من الدرجة n يؤدى إلى تعويض ثالث من الدرجة n محدد بشكل تام . ويسمى هذا الأخير بحاصل

* سوف نحتاج إلى هذه الصور فى الباب الرابع عشر فقط ، ولهذا يمكن إهمالها مؤقتاً عند القراءة الأولى للكتاب .

ضرب أول التعويضين المعطيين فى الثانى . مثلا إذا كان التعويضان المعطيان من الدرجة الرابعة .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

فإن

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

وبالفعل يتحول الرمز 1 إلى 3 فى التعويض A ، ولكن فى التعويض B يتحول الرمز 3 إلى 4 ولهذا فى AB يتحول الرمز 1 إلى 4 ، وهكذا .

ويمكن ضرب التعويضات من الدرجة الواحدة فقط .

ضرب التعويضات من الدرجة النونية لا يخضع لقانون تبادل الحدود (non-commutative) عندما يكون $n \geq 3$ بالفعل يكون لحاصل الضرب BA للتعويضين المأخوذين آنفاً A و B الشكل الآتى

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

أى أن التعويض BA يختلف عن التعويض AB . ويمكن اختيار أمثلة مشابهة لجميع قيم n عند ما يكون $n \geq 3$ ، مع أنه قد يحدث بمحض الصدفة ، أن يحقق زوج من التعويضات قانون تبادل الحدود .

يخضع ضرب التعويضات لقانون ترتيب الحدود (associative) ، أى أنه يمكن التكلم عن حاصل ضرب أى عدد محدود من التعويضات من الدرجة النونية المأخوذة بترتيب معين (نظراً لأن ضرب التعويضات لا يخضع لقانون تبادل الحدود).

وبالفعل ، نفرض أن لدينا التعويضات A و B و C ، وأن الرمز i_1 ، $1 \leq i_1 \leq n$ يتحول فى التعويض A إلى الرمز i_2 ، ويتحول i_2 فى التعويض B إلى الرمز i_3 ، ويتحول الرمز i_3 فى التعويض C إلى الرمز i_4 . حينئذ يتحول الرمز i_1 فى التعويض AB إلى i_3 ، وفى التعويض BC يتحول الرمز i_2 إلى i_4 ، ولهذا فإن الرمز i_1 فى التعويض $(AB)C$ ، كما فى التعويض $A(BC)$ سيتحول إلى الرمز i_4 .

ومن الواضح أن حاصل ضرب أى تعويض فى التعويض المتطابق E ، وكذلك حاصل ضرب E فى A ، يساوى A :

$$AE = EA = A$$

وأخيراً نسمى التعويض A^{-1} بمقلوب التعويض A ، من نفس الدرجة بحيث

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

ومن السهل رؤية أن مقلوب التعويض

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

هو التعويض

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

الذى نحصل عليه من التعويض A بتبديل مكانى الصفين الأعلى والأسفل .

ونتناول الآن دراسة التعويضات التى لها شكل خاص ، والتى نحصل عليها من التعويض المتطابق E بواسطة إجراء تبديل واحد فى الصف الأسفل للتعويض E. وتكون مثل هذه التعويضات فردية ، وتسمى **بالإبدالات** (transpositions) ؛ وتكون لها الصورة

$$\begin{pmatrix} \dots i \dots j \dots \\ \dots j \dots i \dots \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

حيث تمثل النقط الرموز الباقية فى مكانها . ونتفق على استعمال الرمز (i, j) للدلالة على هذا الإبدال . وباستخدام الإبدال على الرمزين i , j فى الصف الأسفل للكتابة (7) لأى تعويض A ، يكافئ ضرب التعويض A من جهة اليمين فى التعويض (8) أى فى (i, j) . وكما نعرف ، فإنه يمكن الحصول على جميع التباديل من n رمز من أى منها ، وعلى سبيل المثال من $1, 2, \dots, n$ ،

بإجراء عدة إبدالات على التوالى . ولهذا ، يمكن الحصول على أى تعويض من التعويض المتطابق بواسطة إجراء عدة إبدالات على التوالى فى الصف الأسفل ، أى بواسطة الضرب المتتالى فى تعويضات من الصورة (8) . وبالتالى يمكن أن نقول (بإهمال العامل E) أن كل تعويض عبارة عن حاصل ضرب عدة إبدالات.

يمكن تحليل كل تعويض إلى حاصل ضرب عدة إبدالات بطرق مختلفة كثيرة .فعلى سبيل المثال، يمكن دائماً إضافة عاملين متساويين من النوع (i, j) (i, j) حاصل ضربهما يعطى التعويض E ، أى أن كلا منهما يلاشى الآخر . ونقدم مثالا آخر :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (12) \quad (15) \quad (34) = (14) \quad (24) \quad (45) \quad (34) \quad (13).$$

إن الطريقة الجديدة لتعريف زوجية التعويض تعتمد على النظرية التالية :

فى جميع مفكوكات التعويض إلى حاصل ضرب إبدالات ، تكون زوجية عدد هذه الإبدالات واحدة ، علماً ، بأنها تطابق زوجية التعويض ذاته .

فالتعويض الموجود فى المثال الذى قدمناه آنفاً ، سيكون فردياً مثلا ؛ ويمكن التحقق من هذا بحساب عدد التعاكسات أيضاً .

وسيتم برهان هذه النظرية ، إذا بينا أن حاصل ضرب أى k من الإبدالات عبارة عن تعويض زوجيته تطابق زوجية العدد k .هذه النظرية صحيحة عندما يكون $k = 1$ ، حيث إن الإبدال عبارة عن تعويض فردى . نفرض أن نظريتنا مبرهنة لحالة $k - 1$ من العوامل . وعندئذ تنتج صحتها لحالة k من العوامل ، من أن للعددين $k - 1$ و k زوجيتين متضادتين ، أما ضرب التعويض (فى حالتنا — حاصل ضرب أول $k - 1$ من العوامل) فى إبدال يكافئ إجراء هذا الإبدال فى الصف الأسفل للتعويض ، أى أن هذا الضرب يؤدى إلى تغيير زوجيته .

إن فك التعويضات إلى دورات (cycles) هو أكثر الطرق ملاءمة لكتابة التعويضات ، والتى تسمح بإيجاد زوجيتها بسهولة . ويمكن أن يبقى أى تعويض من الدرجة n بعضاً من الرموز $1, 2, \ldots, n$ فى مكانها ، ويغير بالفعل مكان الرموز الأخرى . التعويض الذى بتكراره عدداً كافياً من المرات ، يمكن

تحويل أى من رموزه القابلة فعلا للنقل ، إلى أى رمز آخر من هذه الرموز ، يسمى بتعويض دورى (cyclic substitution) ، أو دورة (cycle) . مثال ذلك التعويض الآتى من الدرجة الثامنة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

الذى ينقل فى الواقع الرموز 8 و 6 و 3 و 2 ، بحيث يحول الرمز 2 إلى 8 ، والرمز 8 إلى 3 ، والرمز 3 إلى 6 ، والرمز 6 إلى 2 من جديد .

كل الإبدالات عبارة عن دورات . وقياساً على الكتابة المختصرة للإبدالات التى استعملناها أعلاه ، نستعمل الكتابة التالية للدورات : تكتب الرموز المنقولة فعلا أحدها وراء الآخر بين قوسين دائريين ، بنفس الترتيب الذى يتحول فيه كل واحد منها إلى الآخر عند تكرار التعويض ، ويمكن بدء الكتابة بأى من الرموز المنقولة فعلا ، ويعتبر أن الرمز الأخير يتحول إلى الأول . فى المثال الوارد أعلاه تكون لهذه الكتابة الصورة

$$(2 \; 8 \; 3 \; 6)$$

ويسمى عدد الرموز المنقولة فعلا بواسطة الدورة بطول هذه الدورة (length of the cycle) .

إذا لم تكن لدورتين رموز مشتركة منقولة فعلا ، فإنهما تسميان بدورتين غير مرتبطتين من الدرجة n . ومن المفهوم أنه عند ضرب دورتين غير مرتبطتين لا يؤثر ترتيبهما على النتيجة .

يمكن فك كل تعويض بطريقة وحيدة إلى حاصل ضرب دورات غير مرتبطة فيما بينها . برهان هذه النظرية لا يشكل أية صعوبة ، ولهذا سوف نهمله . يجرى الفك عملياً بالطريقة الآتية : نبدأ بأى رمز من الرموز المنقولة فعلا ، ونكتب بعده تلك الرموز التى يتحول إليها عند تكرار التعويض حتى نصل إلى نفس الرموز مرة أخرى . بعد هذا « الإقفال » للدورة نبدأ بأحد الرموز الباقية المنقولة فعلا ، ونحصل على الدورة الثانية ، وهكذا .

أمثلة :

1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (13) \quad (254)$$

2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (156) \quad (38) \quad (47)$$

وبالعكس ، إذا كان لدينا مفكوك التعويض إلى دورات غير مرتبطة فيمكن إيجاد صورة عادية لهذا التعويض (بشرط معرفة درجة هذا التعويض) . وعلى سبيل المثال

3)
$$(1372) \quad (45) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

إذا كان من المعروف أن درجة هذا التعويض تساوى 7 .

نفرض أن لدينا تعويضاً من الدرجة النونية ، ونفرض أن s هي عدد الدورات غير المرتبطة الداخلة في مفكوكه مضافاً إليه عدد الرموز الباقية في مكانها* . ويسمى الفرق $n-s$ مميز هذا التعويض . ومن الواضح أن المميز يساوي عدد الرموز المنقولة فعلا مطروحاً منه عدد الدورات غير المرتبطة الداخلة في مفكوك التعويض . وفي الأمثلة المقدمة آنفاً (1)، (2)، (3) يساوي المميز 4 ، 4 ، 3 على الترتيب .

زوجية التعويض تطابق زوجية مميز هذا التعويض .

وبالفعل ، يمكن كتابة كل دورة طولها k على صورة حاصل ضرب $k-1$ من الإبدالات بالطريقة الآتية :

$$(i_1 , i_2 , \dots , i_k) = (i_1 , i_2) \ (i_1 , i_3) \dots (i_1 , i_k)$$

نفرض الآن ، أن لدينا مفكوك التعويض A في دورات غير مرتبطة . فإذا فكت كل دورة من الدورات بالطريقة المذكورة آنفا ، إلى حاصل ضرب إبدالات ، فإننا نحصل على تصور التعويض A في صورة حاصل ضرب إبدالات . ومن الواضح أن عدد هذه الإبدالات أقل من عدد الرموز المنقولة فعلا بواسطة التعويض بعدد مساو لعدد الدورات غير المرتبطة في مفكوك هذا التعويض . وينتج من هنا أنه يمكن فك التعويض A إلى حاصل ضرب إبدالات عددها يساوي المميز . ولهذا ، تتحدد زوجية التعويض بزوجية المميز .

٤ — المحددات من الرتبة النونية

نريد الآن تعميم النتائج التي حصلنا عليها في البند ٢ لحالة $n = 2, 3$ على حالة n الاختيارية . ولهذا الغرض ، ينبغي إدخال محددات من الرتبة النونية . غير أنه يستحيل إجراء ذلك بنفس الطريقة التي اتبعت عند إدخال محددات من الرتبتين الثانية والثالثة ، أي بحل مجموعات المعادلات الخطية بصورة عامة : لأن بزيادة n تصبح الحسابات معقدة أكثر فأكثر . وعلينا لا يمكن القيام بها في حالة n الاختيارية . ولذلك نتبع طريقاً آخر : نقوم بدراسة محددات من الرتبتين الثانية والثالثة المعروفة لدينا الآن ونحاول إيجاد القانون العام الذي على أساسه يعبر عن هذه المحددات بدلالة عناصر المصفوفات المناظرة ، ثم نطبق هذا القانون كتعريف

---

* يناظر كل رمز لا ينقله التعويض من مكانه «دورة» طولها الوحدة ، ففي المثال (2 المقدم أعلاه يمكن أن نكتب : (2) (47) (58) (156) . غير أننا لن نفعل هذا .

لمحددات من الرتبة النونية . وبعد ذلك نبرهن على أن قاعدة كرامر تظل صحيحة بأخذ هذا التعريف .

لنتذكر الآن مقادير محددات من الرتبتين الثانية والثالثة :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} .$$

إننا نرى أن كل حد من حدود محدد الرتبة الثانية عبارة عن حاصل ضرب عنصرين واقعين في صفين مختلفين ، وكذلك في عمودين مختلفين ، علماً بأن كل حواصل الضرب التي على هذه الصورة ، والتي يمكن تكوينها من عناصر المصفوفة من الرتبة الثانية (وعددها يساوي اثنين فقط) قد استعملت كحدود للمحدد . وبالمثل ، يكون كل حد من حدود المحدد من الرتبة الثالثة عبارة عن حاصل ضرب ثلاثة عناصر يقع كل منها في كل صف وكل عمود ، علماً بأنه قد استعملت كل حواصل الضرب هذه من جديد كحدود للمحدد .

لتكن لدينا الآن مصفوفة مربعة من الرتبة النونية

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

لننظر الآن إلى كل حواصل الضرب الممكنة من عنصر من عناصر هذه المصفوفة الواقعة في صفوف مختلفة وأعمدة مختلفة ، أي حواصل الضرب التي على الصورة

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \qquad (2)$$

حيث تكون الدلائل (indices) $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$ تبديلا ما من الأعداد $1, 2, \dots, n$. ويساوي عدد حواصل الضرب هذه ، عدد التباديل المختلفة ، التي يمكن تكوينها من n رمز أي يساوي $n!$. وسوف نعتبر كل حواصل الضرب هذه ، حدوداً لمحدد الرتبة النونية الذي سوف يناظر المصفوفة (1) .